RAPPELS DE COURS SUR LES DERIVEES D'EXPRESSIONS REGULIERES et le LEMME D'ARDEN

1 RAPPEL : DEFINITION FORMELLE D'UNE EXPRESSION REGULIERE

- Soit Σ un alphabet de symboles.
  Soit Y un alphabet = { (,), | , * , +, $\bullet$, Λ_e, $\emptyset_e$}
  Une expression régulière sur Σ est un mot de $\Sigma \cup$ Y qui se définit inductivement comme suit :

  Λ_e et $\emptyset_e$ sont des expressions régulières

  tout élément de Σ est une expression régulière

  si x, y sont des expressions régulières, alors x^*, x^+, x $\bullet$ y, (x | y) sont des expressions régulières
- Remarque : s'il n'y a pas d'ambigüité, (x $\bullet$ y) peut se réécrire x $\bullet$ y, et (x | y) peut se réécrire x | y

2 RAPPEL : LANGAGE L[e] ASSOCIE à une EXPRESSION REGULIERE e

- Expression régulière : Λ_e langage associé : { Λ}
- Expression régulière : $\emptyset_e$ langage associé : $\emptyset$
- Expression régulière : x langage associé :{ x }
- Expression régulière : x $\bullet$ y langage associé : L[x] $\bullet$ L[y]
- Expression régulière : x | y langage associé : L[x] $\cup$ L[y]
- Expression régulière : x * langage associé : L[x]*
- Expression régulière : x + langage associé : L[x]+

A tout langage, on ne peut pas nécessairement associer une expression régulière.
En revanche, tout langage régulier peut se décrire par une expression régulière.
On note L[e] le langage décrit par l'expression régulière e.

3 RAPPEL : EXPRESSIONS REGULIERES EQUIVALENTES

- Deux expressions régulières sont équivalentes si elles décrivent le même langage

$\Lambda_e \bullet e = e \bullet \Lambda_e = e$
$\emptyset_e \bullet e = e \bullet \emptyset_e = \emptyset_e$
$e^* = e^+ \mid \Lambda_e$
$e \mid \emptyset_e = \emptyset_e \mid e = e$
$\Lambda_e^* = \Lambda_e$
$\emptyset_e^* = \Lambda_e$
$(e_1 \mid e_2) \mid e_3 = e_1 \mid (e_2 \mid e_3)$ associativité
$(e_1 \mid e_2) \bullet e_3 = (e_1 \bullet e_3) \mid (e_2 \bullet e_3)$ distributivité
$e_1 \bullet (e_2 \mid e_3) = e_1 \bullet e_2 \mid e_1 \bullet e_3$ distributivité
$(e_1 \bullet e_2) \bullet e_3 = e_1 \bullet (e_2 \bullet e_3)$ associativité
$e^* = \Lambda_e \mid e \bullet e^*$
$e \mid e = e$
$e^* \bullet e^* = e^*$
$(e^*)^* = e^*$
$e \bullet e^* = e^* \bullet e = e^+$
$ee^* = e^* \; ssi \; \Lambda \in L(e)$
$(e_1^* \bullet e_2)^* \bullet e_1^* = (e_1 \mid e_2)^* = e_1^* \bullet (e_2 \bullet e_1^*)^* = (e_1^* \mid e_2^*)^* = (e_1^* \bullet e_2^*)^*$

remarque : les $\bullet$ peuvent être omis dans les expressions ci-dessus

4 LEMME d'ARDEN

L'équation $x = \alpha x \mid \beta$ a pour solution $x = \alpha^* \beta$
Le lemme d'Arden permet de transformer un automate en une expression régulière.

5 DERIVATION d'EXPRESSIONS REGULIERES

1. Définition Soit e une expression régulière, soit a un symbole de Σ, on définit la dérivée de e par rapport à a de la manière suivante :
   - $D_a(e) = \{ \omega$ tel que a $\omega \in$ L(e)$\}$

   La méthode des dérivées permet d'associer un automate à une expression régulière.
2. Propriétés des dérivées
   - $D_a(a) = \Lambda$
   - $D_a(b) = \emptyset$
   - $D_a(\emptyset) = \emptyset$
   - $D_a(\Lambda) = \emptyset$
   - $D_a(e_1 \mid e_2) = D_a(e_1) \mid D_a(e_2)$
   - $D_a(e_1^*) = D_a(e_1) \bullet e_1^*$
   - $D_a(e_1 \bullet e_2) = D_a(e_1) \bullet e_2 \mid D_a(e_2) \; si \; \Lambda \in L(e_1)$
   - $D_a(e_1 \bullet e_2) = D_a(e_1) \bullet e_2$ sinon